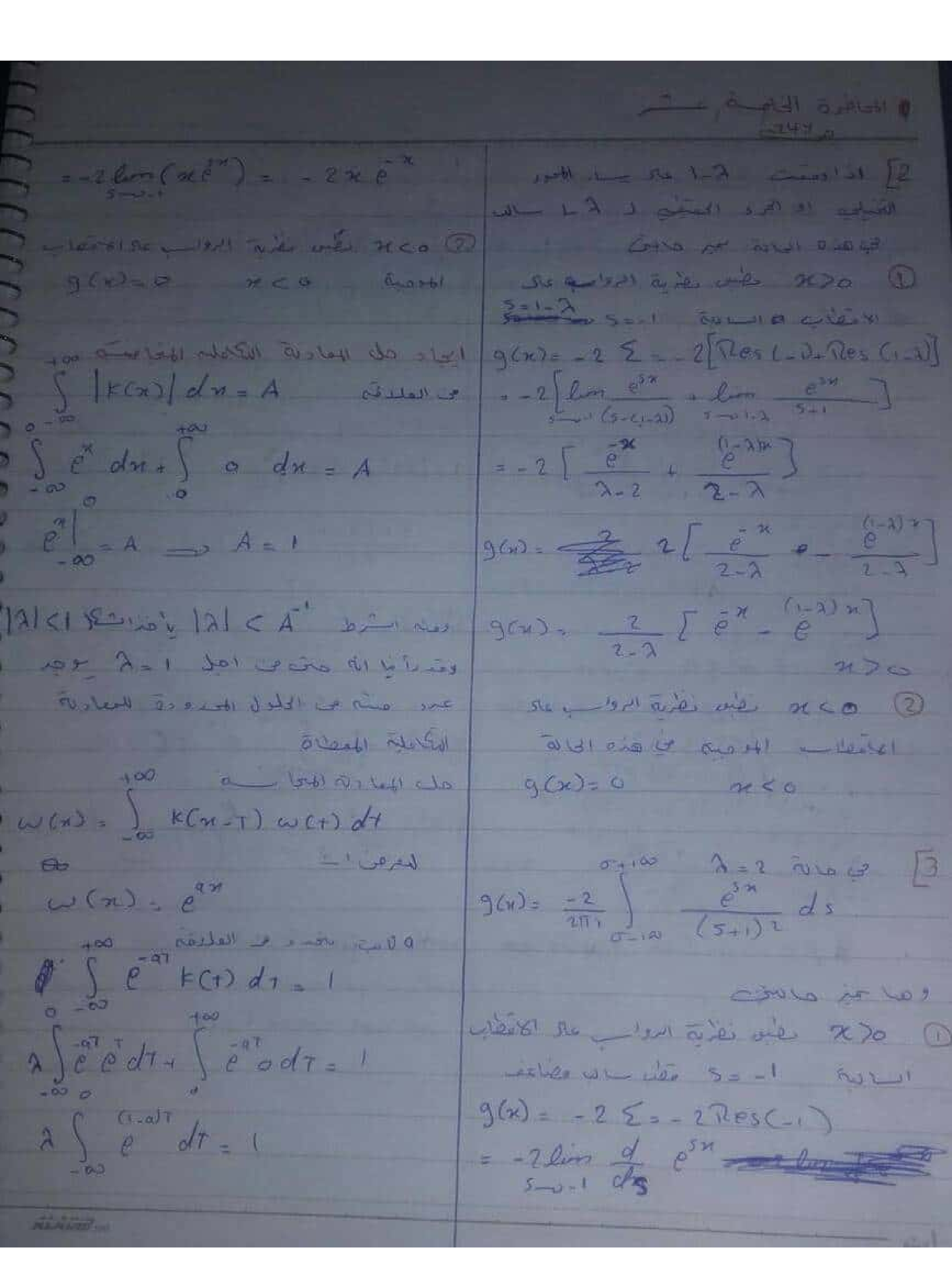


المحاضرة الخامسة عشر

ص 244

[2] اذا وقعت $\lambda - 1$ على يسار المحور التخيلي اي الجزء الحقيقي لـ $1-\lambda$ سالب

فيه هذه الحالة يعير ملاحظة

① $x>0$ نطبق نظرية الرواسب على الاقطاب البسيطة $s=1-\lambda$ ، $s=-1$

$$g(x) = -2\sum = -2\left[Res(-1) + Res(1-\lambda)\right]$$

$$= -2\left[\lim_{s\to 1-\lambda} \frac{e^{sx}}{(s-(1-\lambda))} + \lim_{s\to 1-\lambda} \frac{e^{sx}}{s+1}\right]$$

$$= -2\left[\frac{e^{-x}}{\lambda-2} + \frac{e^{(1-\lambda)x}}{2-\lambda}\right]$$

$$g(x) = 2\left[\frac{e^{-x}}{2-\lambda} - \frac{e^{(1-\lambda)x}}{2-\lambda}\right]$$

$$g(x) = \frac{2}{2-\lambda}\left[e^{-x} - e^{(1-\lambda)x}\right] \quad x>0$$

② $x<0$ نطبق نظرية الرواسب على الاقطاب المرمية في هذه الحالة

$$g(x) = 0 \quad x<0$$

[3] في حالة $\lambda = 2$

$$g(x) = \frac{-2}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{sx}}{(s+1)^2}\, ds$$

وهنا يعير ملاحظة

① $x>0$ نطبق نظرية الرواسب على الاقطاب البسيطة $s=-1$ قطب ثنائي مضاعف

$$g(x) = -2\sum = -2Res(-1)$$

$$= -2\lim_{s\to -1} \frac{d}{ds} e^{sx}$$

$$= -2\lim_{s\to -1}(x e^{sx}) = -2x e^{-x}$$

② $x<0$ نطبق نظرية الرواسب على الاقطاب المرمية

$$g(x) = 0 \quad x<0$$

ايجاد حل المعادلة التكاملية المتجانسة من العلاقة

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |K(x)|\, dx = A$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{x}\, dx + \int_{0}^{+\infty} 0\, dx = A$$

$$e^{x}\Big|_{-\infty}^{0} = A \longrightarrow A = 1$$

ومنه الشرط $|\lambda| < A^{-1}$ يأخذ الشكل $|\lambda|<1$

وعندما يكون الحل من أجل $\lambda = 1$ يوجد عدد منته من الحلول المحدودة للمعادلة التكاملية المتجانسة

حل المعادلة المتجانسة

$$w(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\, w(t)\, dt$$

نفرض أن

$$w(x) = e^{ax}$$

a لابد نعوض في العلاقة

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} K(t)\, dt = 1$$

$$\lambda\int_{-\infty}^{0} e^{-at} e^{t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-at}\, 0\, dt = 1$$

$$\lambda\int_{-\infty}^{0} e^{(1-a)t}\, dt = 1$$

$$\frac{\lambda}{1-a} e^{(1-a)t}\Big|_{-\infty}^{0} = 1$$

نفرض أن الجزء الحقيقي لـ a موجب اصغر من 1

$$\frac{\lambda}{1-a} = 1 \Rightarrow \lambda = 1-a$$

$$\Rightarrow a = 1-\lambda$$

$$\omega(x) = e^{(1-\lambda)x}$$

الطريقة الثانية

[illegible]

لنكن لدينا المعادلة التكاملية

$$g(x) = e^{-|x|} + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\, g(t)\, dt \quad (1)$$

حيث أن:

$$K(x) = \begin{cases} \lambda e^{x} & x \le 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

أوجد حل المعادلة التكاملية بعد تحويل المعادلة التكاملية المعطاة الى معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى

ص 248 دورة 2016-2017 (اول)

إذا $K(x-t) = \lambda e^{x-t}$, $x-t \le 0 \Rightarrow x \le t$

$x > t \Rightarrow x-t > 0$

(2) $$g(x) = e^{-|x|} + \int_{-\infty}^{x} 0 \; g(t)\, dT + \int_{x}^{+\infty} \lambda e^{x-t} g(t)\, dt$$

$$g(x) = e^{-|x|} + \lambda e^{x} \int_{x}^{+\infty} e^{-t} g(t)\, dt \quad (3)$$

نفرض أن:

$$\psi(x) = \int_{x}^{+\infty} e^{-t} g(t)\, dt$$

$$\psi'(x) = -e^{-x} g(x),$$

$$\Rightarrow g(x) = -e^{x} \psi'(x) \quad (3)$$

نعوض $\psi(x)$ و $g(x)$ بـ في (2)

$$-e^{x}\psi'(x) = e^{-|x|} + \lambda e^{x}\psi(x) \quad (4)$$

ونميز حالتين

(1) $x > 0$, $|x| = x$

$$-e^{x}\psi'(x) = e^{-x} + \lambda e^{x}\psi(x)$$

$$\psi'(x) + \lambda\psi(x) = -e^{-2x} \quad (5)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى

$$\mu(x) = e^{\int \lambda dx} = e^{\lambda x}$$

بضرب طرفي المعادلة (5) بعامل التكامل

$$[\psi(x) e^{\lambda x}]' = -e^{\lambda x} e^{-2x} = -e^{(\lambda-2)x}$$

بالمكاملة

$$\psi(x) e^{\lambda x} = \frac{-1}{\lambda-2} e^{(\lambda-2)x} + C_1$$

$$\psi(x) = \frac{-1}{\lambda-2} e^{-2x} + C_1 e^{-\lambda x} \quad (6)$$

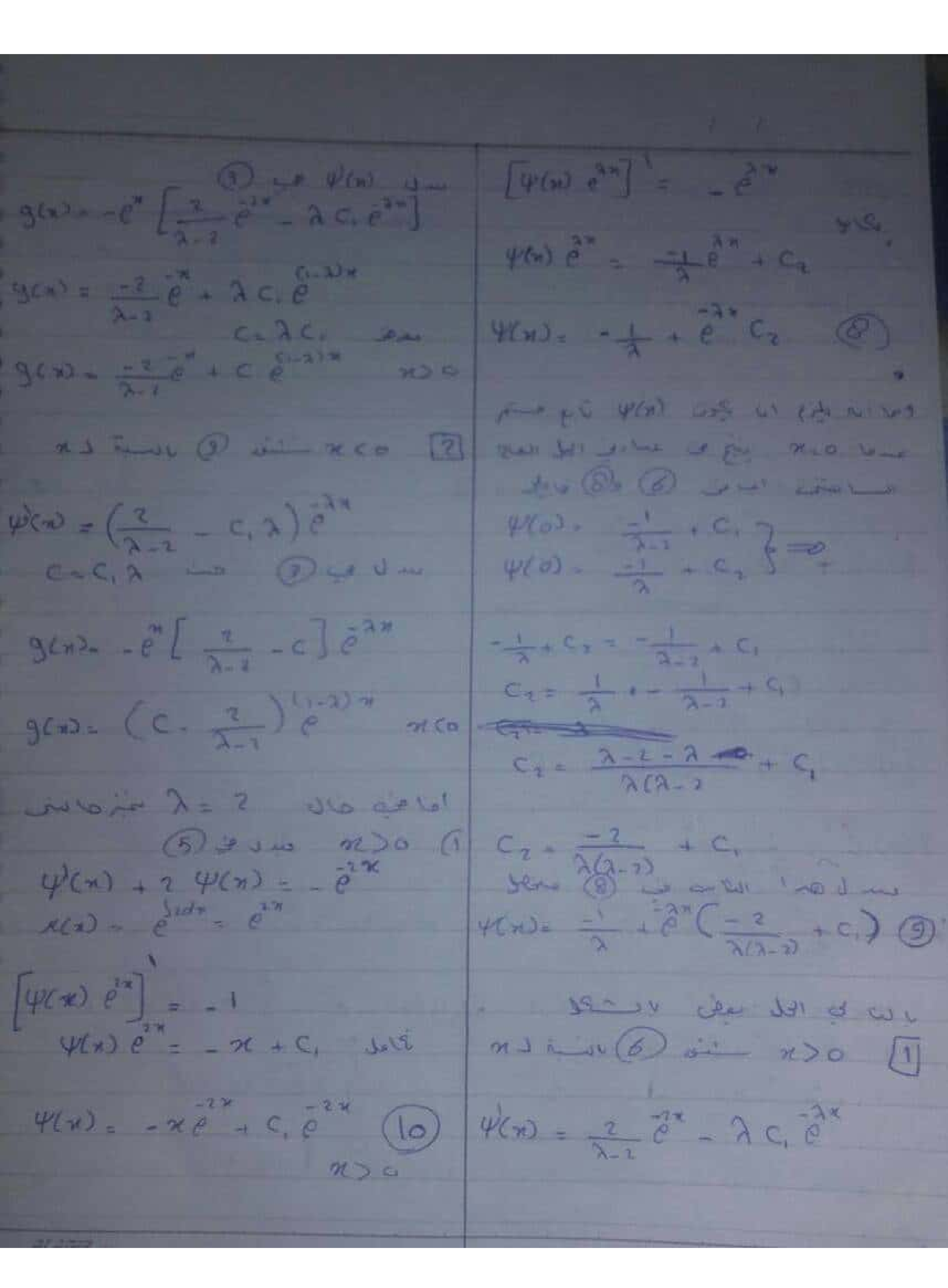
(2) $x < 0$, $|x| = -x$

$$-e^{x}\psi'(x) = e^{x} + \lambda e^{x}\psi(x)$$

$$\psi'(x) + \lambda\psi(x) = -1 \quad (7)$$

$$\mu(x) = e^{\int \lambda dx} = e^{\lambda x}$$

بضرب طرفي المعادلة في عامل التكامل



$$\left[\psi(x)\, e^{\lambda x}\right]' = -e^{\lambda x}$$

[illegible]

$$\psi(x)\, e^{\lambda x} = \frac{-1}{\lambda} e^{\lambda x} + c_2$$

$$\psi(x) = -\frac{1}{\lambda} + e^{-\lambda x} c_2 \quad (8)$$

[illegible] $\psi(x)$ [illegible] $x=0$ [illegible] (6) و (8) [illegible]

$$\left.\begin{aligned}\psi(0) &= \frac{-1}{\lambda-2} + c_1 \\ \psi(0) &= \frac{-1}{\lambda} + c_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{\lambda} + c_2 = -\frac{1}{\lambda-2} + c_1$$

$$c_2 = \frac{1}{\lambda} + -\frac{1}{\lambda-2} + c_1$$

$$c_2 = \frac{\lambda - 2 - \lambda}{\lambda(\lambda-2)} + c_1$$

$$c_2 = \frac{-2}{\lambda(\lambda-2)} + c_1$$

[illegible] (8) [illegible]

$$\psi(x) = \frac{-1}{\lambda} + e^{-\lambda x}\left(\frac{-2}{\lambda(\lambda-2)} + c_1\right) \quad (9)$$

[illegible]

[1] $x>0$ [illegible] (6) [illegible] x

$$\psi'(x) = \frac{2}{\lambda-2} e^{-\lambda x} - \lambda c_1 e^{-\lambda x}$$

[illegible] $\psi'(x)$ في (3)

$$g(x) = -e^{x}\left[\frac{2}{\lambda-2} e^{-\lambda x} - \lambda c_1 e^{-\lambda x}\right]$$

$$g(x) = \frac{-2}{\lambda-2} e^{-x} + \lambda c_1 e^{(1-\lambda)x}$$

$c = \lambda c_1$ [illegible]

$$g(x) = \frac{-2}{\lambda-1} e^{-x} + c\, e^{(1-\lambda)x} \qquad x>0$$

[2] $x<0$ [illegible] (9) [illegible] x

$$\psi'(x) = \left(\frac{2}{\lambda-2} - c_1 \lambda\right) e^{-\lambda x}$$

$c = c_1 \lambda$ [illegible] في (3)

$$g(x) = -e^{x}\left[\frac{2}{\lambda-2} - c\right] e^{-\lambda x}$$

$$g(x) = \left(c - \frac{2}{\lambda-2}\right) e^{(1-\lambda)x} \qquad x<0$$

أما في حالة $\lambda = 2$ [illegible]

(1) $x>0$ [illegible] (5)

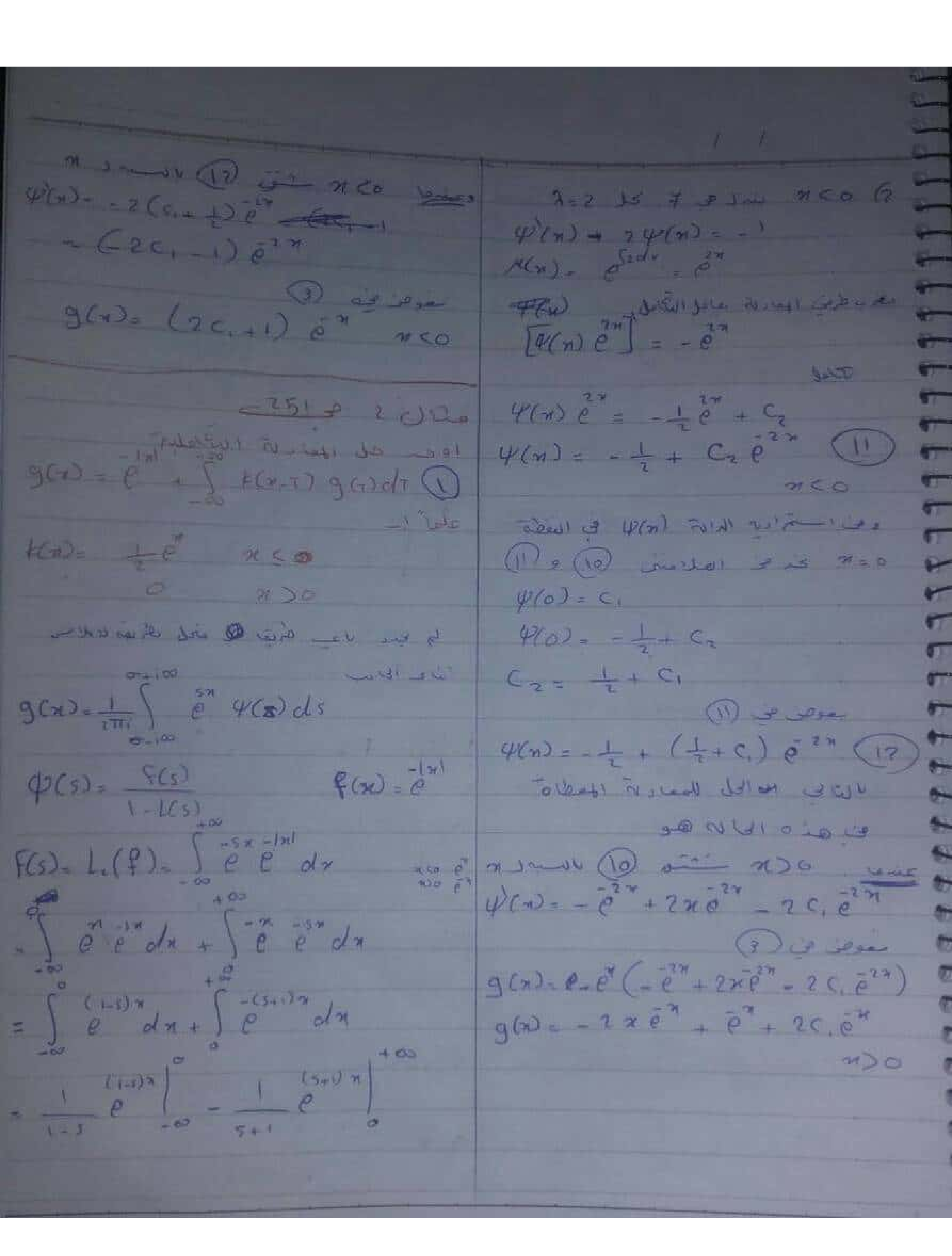
$$\psi'(x) + 2\psi(x) = -e^{-2x}$$

$$\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}$$

$$\left[\psi(x)\, e^{2x}\right]' = -1$$

$$\psi(x)\, e^{2x} = -x + c_1$$

$$\psi(x) = -x e^{-2x} + c_1 e^{-2x} \quad (10) \qquad x>0$$



$x<0$ (2) نعوض في 7 نجد $\lambda = 2$

$$\psi'(x) + 2\psi(x) = -1$$

$$\mu(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل

$$\left[\psi(x)\, e^{2x}\right]' = -e^{2x}$$

نكامل

$$\psi(x)\, e^{2x} = -\frac{1}{2} e^{2x} + C_2$$

$$\psi(x) = -\frac{1}{2} + C_2 e^{-2x} \quad (11)$$

$x<0$

وباستمرارية الدالة $\psi(x)$ في النقطة $x=0$ نحصل من العلاقتين (10) و (11)

$$\psi(0) = C_1$$

$$\psi(0) = -\frac{1}{2} + C_2$$

$$C_2 = \frac{1}{2} + C_1$$

نعوض في (11)

$$\psi(x) = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + C_1\right) e^{-2x} \quad (12)$$

بالتالي فالحل للمعادلة المعطاة في هذه الحالة هو

عكسيا: $x>0$ نشتق (10) بالنسبة لـ x

$$\psi'(x) = -e^{-2x} + 2x e^{-2x} - 2C_1 e^{-2x}$$

نعوض في (3)

$$g(x) = e^{-x}\left(-e^{-2x} + 2x e^{-2x} - 2C_1 e^{-2x}\right)$$

$$g(x) = -2x e^{-x} + e^{-x} + 2C_1 e^{-x}$$

$x>0$

وعكسيا: $x<0$ نشتق (12) بالنسبة لـ x

$$\psi'(x) = -2\left(C_1 + \frac{1}{2}\right) e^{-2x}$$

$$= (-2C_1 - 1)\, e^{-2x}$$

نعوض في (3)

$$g(x) = (2C_1 + 1)\, e^{-x} \quad x<0$$

مثال 2 ص 251

أوجد حل المعادلة التكاملية

$$g(x) = e^{-|x|} + \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-t)\, g(t)\, dt \quad (1)$$

علماً أن

$$k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} & x \le 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

لم نجد باقي طريقة حل التكاملية بالتحويلات

تابع الدرس

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{sx}\, \psi(s)\, ds$$

$$\phi(s) = \frac{F(s)}{1 - L(s)} \qquad f(x) = e^{-|x|}$$

$$F(s) = L_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} e^{-|x|}\, dx \qquad \begin{matrix} x<0 & e^{x} \\ x>0 & e^{-x} \end{matrix}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{x} e^{-sx}\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x} e^{-sx}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(1-s)x}\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-(s+1)x}\, dx$$

$$= \frac{1}{1-s} e^{(1-s)x}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{s+1} e^{-(s+1)x}\Big|_{0}^{+\infty}$$

نفرض الجزء الحقيقي لـ s في المنطقة المشتركة

$$F(s) = \frac{1}{1-s} + \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}$$

$$= \frac{s-1-s-1}{(s+1)(s-1)} = \frac{-2}{(s+1)(s-1)}$$

$$L(s) = L_2(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx}\, k(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{-sx} e^{x}\, dx + \int_{0}^{+\infty} 0\, e^{-sx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{(1-s)x}\, dx = \frac{1}{2}\frac{1}{1-s} e^{(1-s)x}\Big|_{-\infty}^{0}$$

نفرض الجزء الحقيقي لـ s $\sigma < 1$

$$= \frac{1}{2(1-s)} = \frac{-1}{2(s-1)}$$

$$1 - L(s) = 1 + \frac{1}{2(s-1)} = \frac{2s-2+1}{2(s-1)}$$

$$= \frac{2s-1}{2(s-1)}$$

نفرض أن الجزء الحقيقي لـ s يقع

في المنطقة $-1 < \sigma < 1$

$$\phi(s) = \frac{\frac{-2}{(s+1)(s-1)}}{\frac{2(s-1)}{2(s-1)}} = \frac{-4}{(2s-1)(s+1)}$$

$$\phi(s) = \frac{-2}{(s-\frac{1}{2})(s+1)}$$

$$g(x) = \frac{-2}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{sx}}{(s-\frac{1}{2})(s+1)}\, ds$$

وهنا نجد قطبين

① $x>0$ نطبق نظرية الرواسب على الأقطاب

القطب $s=-1$

$$g(x) = -\frac{2}{2\pi i}\, 2\pi i \lim_{s\to -1} \frac{(s+1)\, e^{sx}}{(s+1)(s-\frac{1}{2})}$$

$$g(x) = -2 \lim_{s\to -1} \frac{e^{sx}}{s-\frac{1}{2}}$$

$$g(x) = \frac{4}{3} e^{-x} \qquad x>0$$

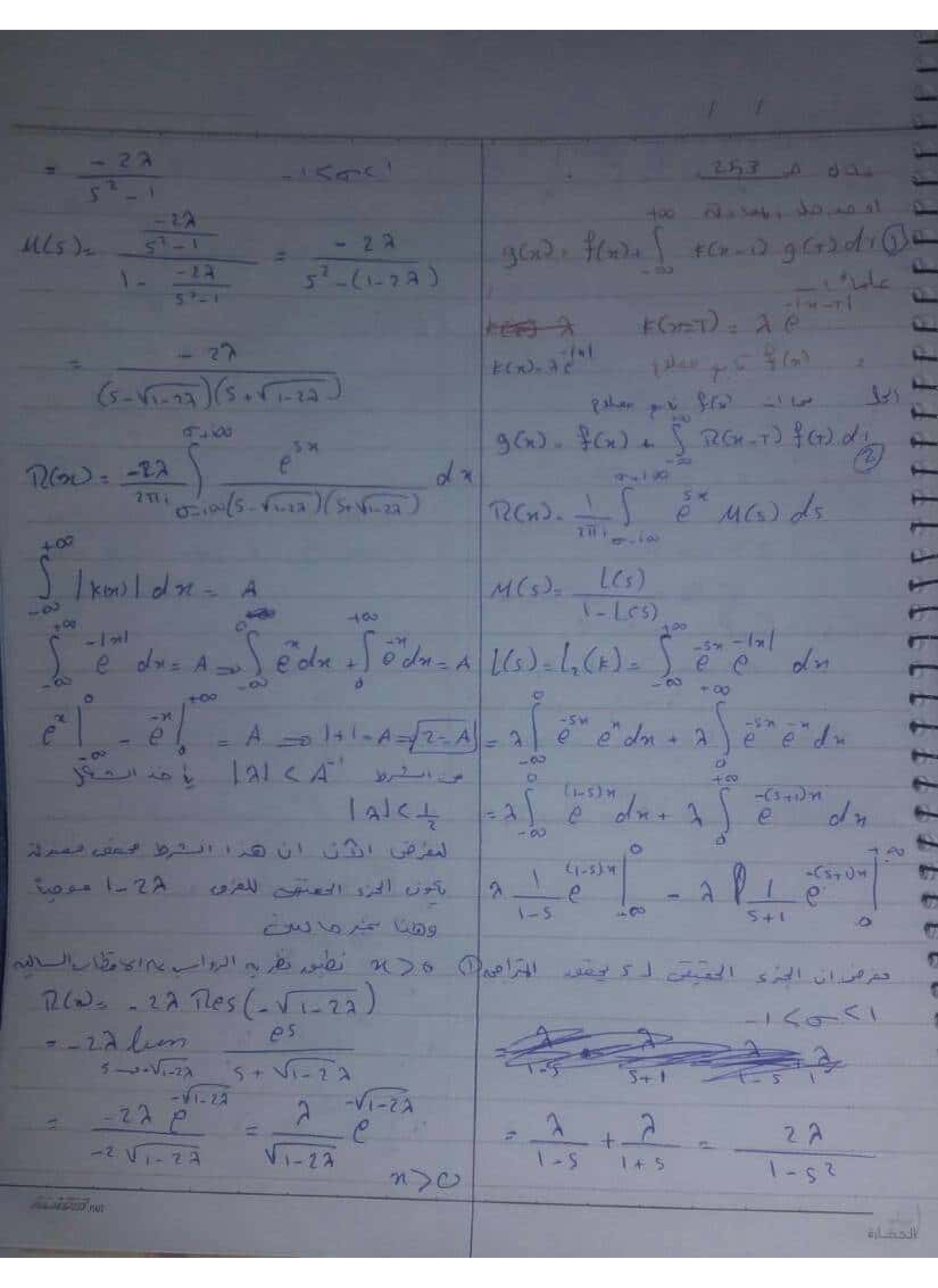
② $x<0$ نطبق نظرية الرواسب

على القطب الموجب $s=\frac{1}{2}$

$$g(x) = -2 \lim_{s\to \frac{1}{2}} \frac{e^{sx}}{s+1}$$

$$= -2\, \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{3}{2}}$$ ~~g(x) = -4~~

$$g(x) = -\frac{4}{3} e^{\frac{1}{2}x} \qquad x<0$$



حل م 253

المعادلة التكاملية

$$g(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-\tau)\, g(\tau)\, d\tau \quad (1)$$

علماً أن

$$k(x-\tau) = \lambda e^{-|x-\tau|}$$

$$k(x) = \lambda e^{-|x|}$$

الحل: ... $f(x)$ ...

$$g(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-\tau)\, f(\tau)\, d\tau \quad (2)$$

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx} M(s)\, ds$$

$$M(s) = \frac{L(s)}{1-L(s)}$$

$$L(s) = L_2(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} e^{-|x|}\, dx$$

$$= \lambda\int_{-\infty}^{0} e^{-sx} e^{x}\, dx + \lambda\int_{0}^{+\infty} e^{-sx} e^{-x}\, dx$$

$$= \lambda\int_{-\infty}^{0} e^{(1-s)x}\, dx + \lambda\int_{0}^{+\infty} e^{-(s+1)x}\, dx$$

$$\lambda \frac{1}{1-s} e^{(1-s)x}\Big|_{-\infty}^{0} - \lambda \frac{1}{s+1} e^{-(s+1)x}\Big|_{0}^{+\infty}$$

نفرض أن الجزء الحقيقي لـ s يحقق المتراجحة ①

$$-1 < \sigma < 1$$

$$= \frac{\lambda}{1-s} + \frac{\lambda}{1+s} = \frac{2\lambda}{1-s^2}$$

$$= \frac{-2\lambda}{s^2-1} \qquad -1 < \sigma < 1$$

$$M(s) = \frac{\frac{-2\lambda}{s^2-1}}{1-\frac{-2\lambda}{s^2-1}} = \frac{-2\lambda}{s^2-(1-2\lambda)}$$

$$= \frac{-2\lambda}{(s-\sqrt{1-2\lambda})(s+\sqrt{1-2\lambda})}$$

$$R(x) = \frac{-2\lambda}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{sx}}{(s-\sqrt{1-2\lambda})(s+\sqrt{1-2\lambda})}\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |k(x)|\, dx = A$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\, dx = A \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} e^{x} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x} dx = A$$

$$e^{x}\Big|_{-\infty}^{0} - e^{-x}\Big|_{0}^{+\infty} = A \Rightarrow 1+1 = A \Rightarrow \boxed{2 = A}$$

من الشرط $|\lambda| < A^{-1}$ يأخذ الشكل

$$|\lambda| < \frac{1}{2}$$

لنفرض الآن أن هذا الشرط محقق فعندئذ يكون الجزء الحقيقي للعدد $1-2\lambda$ موجباً وهذا شيء مناسب

$x > 0$ نطبق نظرية الرواسب على الأقطاب السالبة

$$R(x) = -2\lambda \operatorname{Res}(-\sqrt{1-2\lambda})$$

$$= -2\lambda \lim_{s \to -\sqrt{1-2\lambda}} \frac{e^{s}}{s+\sqrt{1-2\lambda}}$$

$$= \frac{-2\lambda e^{-\sqrt{1-2\lambda}}}{-2\sqrt{1-2\lambda}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}} e^{-\sqrt{1-2\lambda}}$$

$$x > 0$$

$x<0$ نطبق نظرية الرواسب على الأقطاب

[illegible]

$R(x) = -2\lambda \, \mathrm{Res}\left(\sqrt{1-2\lambda}\right)$

$$R(x) = -2\lambda \lim_{s \to \sqrt{1-2\lambda}} \frac{e^{sx}}{s+\sqrt{1-2\lambda}}$$

$$= \frac{-2\lambda e^{\sqrt{1-2\lambda}\,x}}{2\sqrt{1-2\lambda}} = \frac{-\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}} e^{\sqrt{1-2\lambda}\,x}$$

$x<0$

نعوض $R(x-t)$ بما يساويها في العلاقة التي حصلنا عليها في (2) فنحصل على المطلوب

[illegible]

$$w(x) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\, g(t)\, dt$$

نبحث عن حل من الصورة $w(x) = e^{ax}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} K(t)\, dt = 1$$

$$\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} e^{-|t|}\, dt = 1$$

$$\lambda \int_{-\infty}^{0} e^{-at} e^{t}\, dt + \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-t}\, dt = 1$$

$$\lambda \int_{-\infty}^{0} e^{(1-a)t}\, dt + \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+a)t}\, dt = 1$$

$$\frac{\lambda}{1-a} e^{(1-a)t}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{\lambda}{a+1} e^{-(a+1)t}\Big|_{0}^{+\infty} = 1$$

مفروض الجزء الحقيقي لـ a يحقق المتراجحة

$-1<\sigma<1$

$$\frac{\lambda}{1-a} + \frac{\lambda}{a+1} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda}{a+1} - \frac{\lambda}{a-1} = 1$$

$$\frac{-2\lambda}{a^2-1} = 1 \Rightarrow -2\lambda = a^2-1$$

$$a^2 = 1-2\lambda \Rightarrow a = \pm\sqrt{1-2\lambda}$$

$$w(x) = C_1 e^{\sqrt{1-2\lambda}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{1-2\lambda}\,x}$$

C_1 و C_2 ثابتين اختياريين

في حال $\lambda = \frac{1}{2}$

نحصل على $a^2=0 \Rightarrow a=0$

$$w(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{0x} = C_1 + C_2 x$$